

Meridiani e Paralleli: Geometria Differenziale dei Sistemi di Coordinate Terrestri

Fondamenti Geometrici e Coordinate Geografiche sulla Sfera

Introduzione alla Geometria delle Superfici di Riferimento

La rappresentazione matematica della superficie terrestre costituisce uno dei problemi più affascinanti e complessi della geodesia moderna. La Terra, nella sua realtà fisica, presenta una forma irregolare determinata dalla distribuzione non omogenea delle masse interne, dalle variazioni della densità crostale e dagli effetti della rotazione planetaria. Tuttavia, per poter sviluppare sistemi di coordinate utilizzabili nella pratica cartografica, navigazionale e geodetica, risulta necessario approssimare questa superficie complessa mediante modelli geometrici regolari e matematicamente trattabili.

Il primo livello di approssimazione, storicamente il più antico ma ancora fondamentale per comprendere i principi di base, considera la Terra come una sfera perfetta di raggio costante. Sebbene questa rappresentazione trascuri l'ellitticità dovuta alla rotazione terrestre, essa fornisce un eccellente punto di partenza per introdurre i concetti fondamentali della geometria differenziale applicata ai sistemi di coordinate terrestri. La superficie sferica, indicata con il simbolo S^2 , rappresenta infatti una varietà differenziabile bidimensionale immersa nello spazio euclideo tridimensionale, sulla quale è possibile definire strutture geometriche ricche e matematicamente eleganti.

La Sfera come Varietà Differenziabile

Dal punto di vista della geometria differenziale, la sfera S^2 può essere definita formalmente come l'insieme dei punti dello spazio euclideo tridimensionale che soddisfano l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, dove R rappresenta il raggio della sfera e x, y, z sono le coordinate cartesiane standard. Questa definizione implicita caratterizza la sfera come una sottovarietà di dimensione due dello spazio ambiente tridimensionale.

Per poter eseguire calcoli differenziali sulla superficie sferica, risulta necessario introdurre sistemi di coordinate locali che permettano di parametrizzare porzioni della sfera mediante coppie di numeri reali. Il sistema di coordinate più naturale e universalmente adottato in geodesia è quello delle coordinate geografiche, costituito dalla latitudine φ e dalla longitudine λ . Queste coordinate curvilinee forniscono una parametrizzazione della sfera che riflette la simmetria rotazionale intrinseca dell'oggetto geometrico e che possiede un immediato significato fisico legato all'asse di rotazione terrestre.

Definizione Rigorosa delle Coordinate Geografiche

La latitudine geodetica φ di un punto sulla superficie sferica viene definita come l'angolo che la direzione radiale del punto forma con il piano equatoriale. Per convenzione, la latitudine assume valori compresi nell'intervallo $[-\pi/2, +\pi/2]$ radianti, oppure $[-90^\circ, +90^\circ]$ in notazione sessagesimale. I valori positivi di φ corrispondono all'emisfero settentrionale o boreale, mentre i valori negativi identificano l'emisfero meridionale o australe. Il piano equatoriale, definito come il piano perpendicolare all'asse di rotazione terrestre e passante per il centro della sfera, corrisponde alla latitudine $\varphi = 0$ e costituisce il circolo massimo fondamentale del sistema.

La longitudine λ rappresenta invece l'angolo diedro formato dal piano meridiano passante per il punto considerato e da un piano meridiano di riferimento convenzionalmente scelto. Un meridiano è definito come l'intersezione della superficie sferica con un piano contenente l'asse di rotazione terrestre. Il meridiano di riferimento universalmente adottato è il meridiano di Greenwich, che attraversa l'omonimo osservatorio astronomico situato nei pressi di Londra. La longitudine viene convenzionalmente misurata nell'intervallo $[-\pi, +\pi]$ radianti oppure $[-180^\circ, +180^\circ]$, con valori positivi verso est e negativi verso ovest, sebbene esistano convenzioni alternative che utilizzano l'intervallo $[0, 2\pi]$.

Parametrizzazione della Sfera mediante Coordinate Geografiche

La relazione tra le coordinate geografiche (φ, λ) e le coordinate cartesiane (x, y, z) di un punto sulla sfera di raggio R è espressa dalle equazioni di trasformazione:

$$\begin{aligned}x &= R \cos \varphi \cos \lambda \\ y &= R \cos \varphi \sin \lambda \\ z &= R \sin \varphi\end{aligned}$$

Queste relazioni costituiscono una mappa locale dalla regione del piano (φ, λ) appropriata alla corrispondente porzione della superficie sferica. È fondamentale osservare che questa parametrizzazione non è globale, nel senso che non esiste un singolo sistema di coordinate (φ, λ) capace di coprire l'intera superficie sferica in modo biunivoco e differenziabile. Questa impossibilità costituisce una manifestazione del celebre teorema della palla pelosa, secondo cui non esiste un campo vettoriale continuo e non nullo sulla sfera bidimensionale.

Le derivate parziali della mappa di parametrizzazione rispetto alle coordinate φ e λ forniscono i vettori tangenti fondamentali alla superficie:

$$\partial \mathbf{r} / \partial \varphi = (-R \sin \varphi \cos \lambda, -R \sin \varphi \sin \lambda, R \cos \varphi) \quad \partial \mathbf{r} / \partial \lambda = (-R \cos \varphi \sin \lambda, R \cos \varphi \cos \lambda, 0)$$

dove $\mathbf{r} = (x, y, z)$ rappresenta il vettore posizione. Questi vettori tangenti formano una base locale per lo spazio tangente alla sfera in ogni punto regolare e risultano ortogonali tra loro, come può essere verificato calcolando il loro prodotto scalare, che risulta identicamente nullo.

Il Tensore Metrico in Coordinate Sferiche

La struttura geometrica fondamentale che permette di misurare lunghezze, angoli e aree sulla superficie sferica è codificata nel tensore metrico, anche noto come prima forma

fondamentale. Questo tensore definisce il prodotto scalare tra vettori tangenti e quindi permette di calcolare la lunghezza infinitesimale ds di una curva sulla superficie.

Per le coordinate geografiche sulla sfera, il tensore metrico assume la forma diagonale particolarmente semplice:

$$g_{\varphi\varphi} = R^2 \quad g_{\varphi\lambda} = g_{\lambda\varphi} = 0 \quad g_{\lambda\lambda} = R^2 \cos^2 \varphi$$

La forma quadratica associata, che esprime l'elemento di lunghezza infinitesimale, è quindi:

$$ds^2 = g_{\varphi\varphi} (d\varphi)^2 + 2g_{\varphi\lambda} d\varphi d\lambda + g_{\lambda\lambda} (d\lambda)^2 = R^2 (d\varphi)^2 + R^2 \cos^2 \varphi (d\lambda)^2$$

Questa espressione, che può essere scritta più compattamente come $ds^2 = R^2(d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2)$, costituisce l'equazione fondamentale della geometria sferica e permette di calcolare la lunghezza di qualsiasi curva sulla sfera mediante integrazione.

La dipendenza del coefficiente metrico $g_{\lambda\lambda}$ dalla latitudine φ attraverso il fattore $\cos^2 \varphi$ ha profonde implicazioni geometriche. Essa riflette il fatto che i meridiani convergono verso i poli, determinando una diminuzione della distanza fisica corrispondente a un incremento unitario di longitudine man mano che ci si sposta dall'equatore verso le regioni polari. All'equatore ($\varphi = 0$), dove $\cos \varphi = 1$, un grado di longitudine corrisponde alla stessa distanza fisica di un grado di latitudine, pari a circa $R \pi/180 \approx 111,3$ chilometri per $R = 6371$ chilometri. Ai poli ($\varphi = \pm\pi/2$), dove $\cos \varphi = 0$, questa distanza si riduce a zero, riflettendo la convergenza di tutti i meridiani in un singolo punto.

Singularità Coordinate ai Poli: Analisi Dettagliata

Le coordinate geografiche (φ, λ) presentano singolarità coordinate ai poli nord e sud, dove $\varphi = \pm\pi/2$. In questi punti, la coordinata longitudinale λ diventa completamente indeterminata, poiché tutti i meridiani si intersecano. Matematicamente, questa indeterminazione si manifesta nell'annullamento del coefficiente metrico $g_{\lambda\lambda} = R^2 \cos^2 \varphi$, che tende a zero quando φ si avvicina a $\pm\pi/2$.

È cruciale distinguere tra singolarità coordinate, che rappresentano limitazioni del sistema di coordinate scelto, e singolarità geometriche, che indicano irregolarità intrinseche della varietà differenziabile. Nel caso della sfera, i poli non costituiscono singolarità geometriche: la superficie è perfettamente regolare e liscia in questi punti. La singolarità è puramente coordinativa e deriva dalla particolare scelta della parametrizzazione geografica.

Per comprendere meglio questa distinzione, si consideri il comportamento del determinante della matrice metrica, definito come $g = \det(g_{ij}) = g_{\varphi\varphi} g_{\lambda\lambda} - (g_{\varphi\lambda})^2 = R^4 \cos^2 \varphi$. Questo determinante si annulla ai poli, indicando che la mappa di parametrizzazione diventa singolare (non invertibile) in questi punti. Il fattore di scala $\sqrt{g} = R^2 |\cos \varphi|$ rappresenta il fattore per cui vengono moltiplicati gli elementi di area quando si passa dalle coordinate curvilinee (φ, λ) alla misura geometrica intrinseca sulla sfera.

La presenza di queste singolarità coordinate ha importanti conseguenze pratiche. Algoritmi numerici che operano in coordinate geografiche possono diventare instabili nelle regioni polari, dove piccole variazioni della longitudine corrispondono a spostamenti fisici

trascurabili. Sistemi di navigazione basati su coordinate geografiche richiedono particolare attenzione quando operano ad alte latitudini. Proiezioni cartografiche che tentano di rappresentare le regioni polari su mappe piane mostrano inevitabilmente distorsioni crescenti man mano che ci si avvicina ai poli.

Teoria degli Atlanti e Carte Multiple

La teoria matematica rigorosa delle varietà differenziabili fornisce il framework concettuale appropriato per gestire le singolarità coordinate mediante l'introduzione del concetto di atlante. Un atlante è una collezione di carte locali, ciascuna delle quali fornisce un sistema di coordinate valido su una porzione aperta della varietà, con la proprietà che l'unione di tutte queste porzioni ricopre l'intera varietà.

Per la sfera S^2 , un atlante minimale richiede almeno due carte. Un esempio classico è fornito dalla proiezione stereografica, che può essere applicata da due poli diversi. La proiezione stereografica dal polo nord fornisce coordinate (u, v) che coprono l'intera sfera eccetto il polo nord stesso, mentre la proiezione stereografica dal polo sud copre l'intera sfera eccetto il polo sud. L'unione di queste due carte ricopre completamente S^2 , e nelle regioni di sovrapposizione (tutta la sfera eccetto i poli) le funzioni di transizione tra le due carte risultano differenziabili, anzi analitiche.

Nel contesto delle coordinate geografiche, un possibile atlante consiste nel dividere la sfera in diverse regioni mediante meridiani di separazione, utilizzando diversi intervalli di longitudine in carte diverse. Ad esempio, si possono definire carte che escludono piccole regioni intorno ai poli, utilizzando coordinate cartesiane locali tangenti in prossimità di questi punti critici. Un'altra strategia consiste nell'adottare sistemi di coordinate completamente diversi nelle regioni polari, come le coordinate polari piane centrate sui poli geografici.

Geodetiche sulla Sfera: i Circoli Massimi

Una geodetica su una superficie è definita come la curva che minimizza localmente la distanza tra due punti, generalizzando il concetto di linea retta dello spazio euclideo. Sulla sfera, le geodetiche sono i cerchi massimi, ovvero le intersezioni della superficie sferica con piani passanti per il centro della sfera.

L'equazione differenziale che caratterizza le geodetiche può essere derivata dal principio variazionale che richiede la stazionarietà dell'integrale di lunghezza. In coordinate geografiche, per una curva parametrizzata come $\varphi(t)$, $\lambda(t)$, l'integrale di lunghezza è:

$$L = \int \sqrt{R^2 (d\varphi/dt)^2 + R^2 \cos^2 \varphi (d\lambda/dt)^2} dt$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange associate a questo funzionale forniscono il sistema di equazioni differenziali del secondo ordine per le geodetiche. Nel caso particolare dei meridiani ($\lambda = \text{costante}$), che sono evidentemente geodetiche per simmetria, si ha $d\lambda/dt = 0$ e l'equazione si riduce a $d^2\varphi/dt^2 = 0$, indicando parametrizzazione a velocità costante.

Il parallelo all'equatore ($\varphi = 0$) è anch'esso una geodetica, essendo un cerchio massimo. Tutti gli altri paralleli ($\varphi = \text{costante} \neq 0$) non sono geodetiche, ma cerchi di raggio inferiore al

raggio della sfera, e rappresentano quindi curve che non minimizzano la distanza tra due punti su di esse situati.

Curvatura della Sfera e Teorema di Gauss

Una delle proprietà geometriche più importanti di una superficie è la sua curvatura. Per superfici bidimensionali immerse nello spazio tridimensionale, si possono definire diverse nozioni di curvatura, tra cui la curvatura gaussiana K , che è una proprietà intrinseca della geometria della superficie, indipendente dall'immersione specifica nello spazio ambiente.

Per la sfera di raggio R , la curvatura gaussiana è costante e positiva in ogni punto:

$$K = 1/R^2$$

Questo valore costante riflette la perfetta simmetria sferica della superficie. Il teorema egregium di Gauss stabilisce che la curvatura gaussiana può essere espressa interamente in termini del tensore metrico e delle sue derivate, senza riferimento all'immersione nello spazio tridimensionale. Per coordinate generali (u^1, u^2) con tensore metrico g_{ij} , la curvatura gaussiana è data da una formula complessa che coinvolge i simboli di Christoffel e le loro derivate.

Nel caso specifico delle coordinate geografiche sulla sfera, grazie alla particolare simmetria e semplicità del tensore metrico, il calcolo si semplifica notevolmente. La curvatura può essere calcolata utilizzando la formula:

$$K = -(1/\sqrt{g}) [\partial/\partial\varphi (\sqrt{g}/g_{\varphi\varphi} \partial g_{\lambda\lambda}/\partial\varphi)]$$

Sostituendo i valori espliciti $g_{\varphi\varphi} = R^2$, $g_{\lambda\lambda} = R^2 \cos^2 \varphi$, $\sqrt{g} = R^2 \cos \varphi$, si ottiene dopo alcuni passaggi algebrici il risultato $K = 1/R^2$, confermando la costanza della curvatura gaussiana.

Trasporto Parallelo e Connessione di Levi-Civita

Il concetto di trasporto parallelo di un vettore lungo una curva sulla superficie introduce la nozione di connessione, che descrive come confrontare vettori tangenti in punti diversi della varietà. Sulla sfera, dotata della metrica naturale indotta dall'immersione euclidea, esiste una connessione canonica detta connessione di Levi-Civita, che è compatibile con la metrica e priva di torsione.

I simboli di Christoffel Γ^k_{ij} , che caratterizzano la connessione, possono essere calcolati esplicitamente in coordinate geografiche. Per il tensore metrico sferico, i simboli di Christoffel non nulli sono:

$$\Gamma^\varphi_{\varphi\lambda} = -\sin \varphi \cos \varphi \quad \Gamma^\lambda_{\varphi\lambda} = \Gamma^\lambda_{\lambda\varphi} = \tan \varphi$$

Tutti gli altri simboli si annullano. Questi coefficienti determinano come i vettori base $\partial/\partial\varphi$ e $\partial/\partial\lambda$ variano quando ci si sposta sulla superficie. L'equazione del trasporto parallelo per un vettore $V = V^\varphi \partial/\partial\varphi + V^\lambda \partial/\partial\lambda$ lungo una curva $\gamma(t) = (\varphi(t), \lambda(t))$ è:

$$dV^\lambda/dt + \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} (d\lambda/dt) V^\mu = 0 \quad dV^\lambda/dt + \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} (d\phi/dt) V^\mu + \Gamma^\lambda_{\mu\phi} (d\lambda/dt) V^\mu = 0$$

Un fenomeno notevole è l'olonomia: se si trasporta parallelamente un vettore lungo un percorso chiuso sulla sfera, il vettore finale può differire dal vettore iniziale per una rotazione. Questo effetto, quantificato dal teorema di Gauss-Bonnet, è direttamente legato alla curvatura della superficie.

Relazione tra Geometria Sferica e Ellissoidale

Sebbene la sfera rappresenti un'eccellente prima approssimazione della forma terrestre, la Terra reale è meglio descritta da un ellissoide di rotazione, schiacciato ai poli a causa della rotazione planetaria. Il passaggio dalla geometria sferica a quella ellissoidale introduce complicazioni significative ma necessarie per applicazioni geodetiche di precisione.

Un ellissoide di rotazione è caratterizzato da due parametri: il semiasse equatoriale a e il semiasse polare b , con lo schiacciamento definito come $f = (a - b)/a$. Per la Terra, lo schiacciamento è dell'ordine di $f \approx 1/298,257$, un valore piccolo ma non trascurabile per misurazioni di precisione. L'equazione dell'ellissoide in coordinate cartesiane è:

$$x^2/a^2 + y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$$

Anche sull'ellissoide si possono definire coordinate geografiche (ϕ, λ) , ma con importanti differenze rispetto al caso sferico. In particolare, la latitudine ϕ sull'ellissoide è definita come l'angolo che la normale alla superficie forma con il piano equatoriale, e non coincide con la latitudine geocentrica (angolo del raggio vettore), né con la latitudine geografica sulla sfera equivalente.

Il tensore metrico sull'ellissoide assume una forma più complessa:

$$ds^2 = M^2 d\phi^2 + N^2 \cos^2 \phi d\lambda^2$$

dove M e N sono i raggi di curvatura principali dell'ellissoide, funzioni della latitudine ϕ . Esplicitamente:

$$M = a(1 - e^2)/(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2} \quad N = a/(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}$$

dove $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$ è la prima eccentricità al quadrato. Per $e \rightarrow 0$, si ottiene $M = N = a$ e si recupera il caso sferico.

Proiezioni Cartografiche e il Sistema UTM

Fondamenti delle Proiezioni Cartografiche

La rappresentazione della superficie curva terrestre su un piano costituisce uno dei problemi classici della cartografia matematica. Il teorema egregium di Gauss stabilisce che non esiste alcuna mappa isometrica (che preservi le distanze) dalla sfera al piano, poiché questi due spazi possiedono curvature gaussiane diverse: $K = 1/R^2$ per la sfera e $K = 0$ per il piano. Conseguentemente, ogni proiezione cartografica introduce necessariamente distorsioni di

qualche tipo: nelle distanze, negli angoli, nelle aree o in una combinazione di queste proprietà geometriche.

Una proiezione cartografica è matematicamente definita come una funzione che associa punti della superficie terrestre (identificati da coordinate geografiche φ, λ) a punti del piano cartografico (identificati da coordinate cartesiane x, y). La teoria generale delle proiezioni cartografiche classifica queste trasformazioni in base alle proprietà geometriche che preservano o alle superfici ausiliarie utilizzate nel processo di proiezione.

Le principali categorie di proiezioni includono le proiezioni conformi o isogonali, che preservano gli angoli localmente, le proiezioni equivalenti o autàliche, che conservano le aree, e le proiezioni equidistanti, che mantengono costante il fattore di scala lungo particolari direzioni. Una celebre impossibilità dimostrata matematicamente è che nessuna proiezione può essere simultaneamente conforme ed equivalente, eccetto nel caso triviale dell'identità sulla sfera stessa.

Dal punto di vista della classificazione per superficie ausiliaria, le proiezioni si dividono in proiezioni azimutali o zenitali, ottenute proiettando su un piano tangente o secante alla sfera, proiezioni cilindriche, che utilizzano un cilindro come superficie di sviluppo, e proiezioni coniche, basate su un cono tangente o secante. Esistono inoltre proiezioni pseudocilindriche, pseudoconiche e altre varianti che non si adattano strettamente a questa classificazione geometrica.

Proiezioni Cilindriche: Geometria e Proprietà

Le proiezioni cilindriche rivestono particolare importanza pratica per la loro semplicità concettuale e per le proprietà che possono essere ottenute. Una proiezione cilindrica si costruisce concettualmente avvolgendo un cilindro attorno alla sfera, stabilendo una corrispondenza tra punti della sfera e punti del cilindro, e quindi sviluppando il cilindro sul piano.

Il cilindro può essere orientato in diversi modi rispetto alla sfera. Nella configurazione normale o diretta, l'asse del cilindro coincide con l'asse polare terrestre, e il cilindro è tangente all'equatore. Questa configurazione produce meridiani rappresentati come linee verticali parallele e paralleli rappresentati come linee orizzontali parallele. Nella configurazione trasversa, l'asse del cilindro giace nel piano equatoriale, e il cilindro è tangente lungo un meridiano. Nella configurazione obliqua, l'asse del cilindro forma un angolo arbitrario con l'asse polare.

Per una proiezione cilindrica diretta, le equazioni generali assumono la forma:

$$x = R \lambda \quad y = R g(\varphi)$$

dove $f(\varphi)$ e $g(\varphi)$ sono funzioni opportune della latitudine che determinano le proprietà specifiche della proiezione. Diverse scelte di queste funzioni producono proiezioni con caratteristiche geometriche differenti.

La proiezione cilindrica equidistante, anche nota come proiezione equirettangolare o di Cassini, utilizza semplicemente $f(\varphi) = 1$ e $g(\varphi) = \varphi$, ottenendo:

$$x = R \lambda \quad y = R \varphi$$

Questa proiezione è estremamente semplice ma introduce distorsioni significative lontano dall'equatore. Il fattore di scala lungo i meridiani è $h = 1$, mentre lungo i paralleli è $k = \sec \varphi = 1/\cos \varphi$, che diverge verso infinito ai poli.

La celebre proiezione di Mercatore, fondamentale per la navigazione marittima, è una proiezione cilindrica conforme ottenuta con $f(\varphi) = 1$ e $g(\varphi) = \operatorname{arctanh}(\sin \varphi) = \ln|\tan(\pi/4 + \varphi/2)|$. Le equazioni della proiezione di Mercatore sono quindi:

$$x = R \lambda \quad y = R \ln|\tan(\pi/4 + \varphi/2)|$$

La proprietà conforme implica che il fattore di scala sia isotropo: $h = k = \sec \varphi$. Questa proiezione preserva gli angoli e le forme localmente, ma distorce enormemente le aree alle alte latitudini. La Groenlandia, ad esempio, appare molto più grande dell'Africa, mentre nella realtà l'Africa ha un'area circa quattordici volte superiore.

Il Sistema Universal Transverse Mercator (UTM): Struttura Generale

Il sistema Universal Transverse Mercator rappresenta uno dei sistemi di coordinate cartografiche più ampiamente utilizzati al mondo per applicazioni cartografiche, geodetiche e di posizionamento terrestre a scala regionale e locale. Sviluppato dall'esercito degli Stati Uniti negli anni Quaranta del ventesimo secolo e successivamente adottato internazionalmente, il sistema UTM fornisce un framework unificato per la rappresentazione cartografica dell'intero globo terrestre mediante una collezione di proiezioni cilindriche trasverse conformi.

La filosofia fondamentale del sistema UTM consiste nel dividere il globo in sessanta fusi longitudinali, ciascuno esteso per sei gradi di longitudine, numerati da 1 a 60 a partire dall'antimeridiano di Greenwich (180° ovest) e procedendo verso est. Ogni fuso è coperto da una proiezione cilindrica trasversa di Mercatore con cilindro tangente al meridiano centrale del fuso stesso. Questa strategia minimizza le distorsioni all'interno di ciascun fuso, poiché le distorsioni delle proiezioni cilindriche trasverse crescono con la distanza dal meridiano di tangenza.

I confini longitudinali dei fusi UTM sono posizionati a multipli di sei gradi: il fuso 1 si estende da 180° ovest a 174° ovest, il fuso 2 da 174° ovest a 168° ovest, e così via. Il fuso 30, particolarmente significativo perché il suo meridiano centrale a 3° est attraversa l'Europa occidentale, copre la regione da 0° a 6° est. Il fuso 31, il cui meridiano centrale a 9° est passa per l'Italia settentrionale, copre da 6° est a 12° est, e il fuso 32 da 12° est a 18° est. L'Italia, estendendosi approssimativamente da 6° est a 19° est, è coperta principalmente dai fusi 32 e 33, con piccole porzioni nei fusi 31 e 34.

In latitudine, il sistema UTM copre ufficialmente la regione da 80° sud a 84° nord. Questa estensione esclude le regioni polari più estreme, dove le proiezioni cilindriche trasverse diventano altamente distorte e inefficienti. Per le regioni polari, si utilizza invece il sistema UPS (Universal Polar Stereographic), basato su proiezioni azimutali stereografiche centrate sui poli.

Oltre alla divisione in fusi longitudinali, il sistema UTM definisce anche zone latitudinali, indicate con lettere dell'alfabeto dalla C (tra 80° sud e 72° sud) alla X (tra 72° nord e 84° nord), procedendo verso nord. Ogni zona latitudinale si estende per otto gradi di latitudine, eccetto la zona X che si estende per dodici gradi. La combinazione del numero di fuso e della lettera di zona (ad esempio, 32T o 33T per diverse regioni italiane) identifica univocamente una cella della griglia globale UTM.

Formulazione Matematica della Proiezione Trasversa di Mercatore

La proiezione trasversa di Mercatore utilizzata nel sistema UTM è una trasformazione conforme dalla superficie ellissoidale terrestre al piano cartografico. Per comprendere questa proiezione, è utile considerare prima il caso sferico e quindi generalizzare al caso ellissoidale più realistico.

Nel caso sferico, la proiezione trasversa di Mercatore può essere costruita ruotando il sistema di coordinate in modo che il meridiano di tangenza diventi il nuovo "equatore" del sistema ruotato, applicando la proiezione ordinaria di Mercatore nel sistema ruotato, e quindi riportando le coordinate al sistema originale. Questo approccio produce equazioni che coinvolgono funzioni trigonometriche e iperboliche delle coordinate geografiche.

Per il caso ellissoidale, che è quello effettivamente implementato nel sistema UTM, le equazioni diventano significativamente più complesse. La trasformazione esatta dalla latitudine e longitudine geografiche (φ , λ) alle coordinate cartesiane UTM (E, N) coinvolge serie infinite di termini che dipendono dall'eccentricità dell'ellissoide e dalla distanza longitudinale dal meridiano centrale.

Le formule UTM standard utilizzano sviluppi in serie che includono termini fino all'ordine ottavo o superiore per garantire accuratezza millimetrica su tutto il fuso. Una forma semplificata, valida per distanze moderate dal meridiano centrale, può essere espressa come:

$$E = E_0 + k_0 N [\cos \varphi (\lambda - \lambda_0) + \cos^3 \varphi (\lambda - \lambda_0)^3 (1 - \tan^2 \varphi + \eta^2)/6 + \dots] \quad N = N_0 + k_0 [M + N \cos^2 \varphi \tan \varphi (\lambda - \lambda_0)^2/2 + \dots]$$

dove E_0 e N_0 sono le costanti di falsa origine (false easting e false northing), k_0 è il fattore di scala al meridiano centrale, λ_0 è la longitudine del meridiano centrale del fuso, M è la distanza meridiana dall'equatore, N è il raggio di curvatura nella direzione primo verticale, e $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ con e' eccentricità seconda dell'ellissoide.

Il sistema UTM adotta convenzionalmente i seguenti valori numerici:

- Falsa origine est: $E_0 = 500.000$ metri (per evitare coordinate negative a ovest del meridiano centrale)
- Falsa origine nord: $N_0 = 0$ metri per l'emisfero nord, $N_0 = 10.000.000$ metri per l'emisfero sud
- Fattore di scala al meridiano centrale: $k_0 = 0,9996$

Il fattore di scala $k_0 = 0,9996 < 1$ implica che il cilindro di proiezione non è tangente ma secante all'ellissoide terrestre. Questa scelta produce due meridiani secanti, situati

approssimativamente a 180 chilometri est e ovest dal meridiano centrale, lungo i quali il fattore di scala è esattamente unitario. Al meridiano centrale, il fattore di scala è 0,9996, mentre ai bordi del fuso ($\pm 3^\circ$ dal meridiano centrale) esso cresce a circa 1,0004. Questa distribuzione delle distorsioni minimizza l'errore massimo di scala all'interno del fuso.

Calcolo Dettagliato delle Coordinate UTM

Per calcolare esplicitamente le coordinate UTM da coordinate geografiche, è necessario seguire una procedura che coinvolge diverse quantità intermedie. Si consideri un punto sulla superficie dell'ellissoide WGS84, caratterizzato da semiasse equatoriale $a = 6.378.137,0$ metri e schiacciamento $f = 1/298,257223563$, con latitudine φ e longitudine λ .

La prima quantità da calcolare è la prima eccentricità al quadrato:

$$e^2 = f(2 - f) = 0,00669437999014$$

e la seconda eccentricità al quadrato:

$$e'^2 = e^2/(1 - e^2) = 0,00673949674228$$

Il raggio di curvatura nella direzione primo verticale è:

$$N = a/\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

La distanza meridiana M dall'equatore al parallelo di latitudine φ è calcolata mediante una serie di potenze della latitudine:

$$M = a[(1 - e^2/4 - 3e^4/64 - 5e^6/256)\varphi - (3e^2/8 + 3e^4/32 + 45e^6/1024)\sin(2\varphi) + (15e^4/256 + 45e^6/1024)\sin(4\varphi) - (35e^6/3072)\sin(6\varphi)]$$

Definita la differenza longitudinale rispetto al meridiano centrale del fuso:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$$

si calcolano quindi le coordinate UTM mediante le formule complete:

$$E = E_0 + k_0 N [A + (1 - T + C)A^3/6 + (5 - 18T + T^2 + 72C - 58e'^2)A^5/120]$$

$$N = N_0 + k_0 \{M + N \tan \varphi [A^2/2 + (5 - T + 9C + 4C^2)A^4/24 + (61 - 58T + T^2 + 600C - 330e'^2)A^6/720]\}$$

dove si sono definite le quantità ausiliarie:

$$A = \cos \varphi \Delta\lambda \quad T = \tan^2 \varphi \quad C = e'^2 \cos^2 \varphi$$

Queste formule rappresentano sviluppi in serie troncati che forniscono precisione sub-millimetrica per distanze fino a circa 300 chilometri dal meridiano centrale, ampiamente sufficiente per l'estensione di un fuso UTM (circa 660 chilometri all'equatore).

Convergenza Meridiana e Fattore di Scala Punto

Due quantità fondamentali per comprendere le proprietà locali della proiezione UTM sono la convergenza meridiana γ e il fattore di scala punto k .

La convergenza meridiana γ rappresenta l'angolo tra la direzione del nord geografico (tangente al meridiano) e la direzione del nord griglia (parallela all'asse y della carta UTM). Questo angolo varia da punto a punto e può essere calcolato mediante:

$$\gamma = \Delta\lambda \sin \varphi + (\Delta\lambda)^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4)/3 + (\Delta\lambda)^5 \sin \varphi \cos^4 \varphi (2 - \tan^2 \varphi)/15$$

Al meridiano centrale, dove $\Delta\lambda = 0$, la convergenza è nulla: il nord geografico e il nord griglia coincidono. La convergenza cresce con la distanza dal meridiano centrale e con la latitudine. Ai bordi di un fuso a latitudine 45° , la convergenza può raggiungere valori di circa $\pm 2,5^\circ$.

Il fattore di scala punto k rappresenta il rapporto tra una distanza infinitesimale sulla carta e la corrispondente distanza sulla superficie ellissoidale. Per la proiezione UTM conforme, questo fattore è isotropo (uguale in tutte le direzioni) in ogni punto. Il suo valore può essere calcolato mediante:

$$k = k_0 [1 + (1 + \eta^2)(\Delta\lambda)^2 \cos^2 \varphi/2 + (5 - 4\tan^2 \varphi + 42\eta^2 + 13\eta^4 - 28e^2 \tan^2 \varphi)(\Delta\lambda)^4 \cos^4 \varphi/24]$$

Al meridiano centrale, $k = k_0 = 0,9996$. Lungo i meridiani secanti, situati approssimativamente a $\Delta\lambda = \pm 1,6^\circ$, il fattore di scala è $k \approx 1,0000$. Ai bordi del fuso, k può raggiungere valori di circa 1,0004.

Il prodotto del fattore di scala per la distanza ellissoidale fornisce la distanza sulla carta UTM. Viceversa, per ottenere distanze geodetiche accurate da misurazioni su carta o da coordinate UTM, è necessario applicare la correzione inversa dividendo per il fattore di scala appropriato.

Trasformazione Inversa: Da Coordinate UTM a Geografiche

La trasformazione inversa, che converte coordinate UTM (E , N) in coordinate geografiche (φ , λ), è altrettanto importante e leggermente più complessa computazionalmente. La procedura standard prevede un processo iterativo o l'uso di sviluppi in serie analoghe a quelle dirette.

Il primo passo consiste nel rimuovere le false origini e il fattore di scala:

$$E_1 = (E - E_0)/k_0 \quad N_1 = (N - N_0)/k_0$$

Si calcola quindi una latitudine "footpoint" φ_1 , definita come la latitudine il cui arco meridiano è pari a N_1 . Questa può essere ottenuta invertendo numericamente la formula per M , oppure mediante una serie esplicita:

$$\varphi_1 = \mu + (3e_1/2 - 27e_1^3/32)\sin(2\mu) + (21e_1^2/16 - 55e_1^4/32)\sin(4\mu) + (151e_1^3/96)\sin(6\mu) + (1097e_1^4/512)\sin(8\mu)$$

$$\text{dove } \mu = N_1/[a(1 - e^2/4 - 3e^4/64 - 5e^6/256)] \text{ e } e_1 = (1 - \sqrt{(1-e^2)})/(1 + \sqrt{(1-e^2)}).$$

A partire da φ_1 , si calcolano quindi i raggi di curvatura N_1 e M_1 , la tangente T_1 , l'eccentricità seconda C_1 , e altre quantità ausiliarie in φ_1 . Infine, si ottengono le coordinate geografiche mediante:

$$\varphi = \varphi_1 - (N_1 \tan \varphi_1 / M_1) [D^2/2 - (5 + 3T_1 + 10C_1 - 4C_1^2 - 9e'^2)D^4/24 + (61 + 90T_1 + 298C_1 + 45T_1^2 - 252e'^2 - 3C_1^2)D^6/720]$$

$$\lambda = \lambda_0 + [D - (1 + 2T_1 + C_1)D^3/6 + (5 - 2C_1 + 28T_1 - 3C_1^2 + 8e'^2 + 24T_1^2)D^5/120]/(\cos \varphi_1)$$

dove $D = E_1/N_1$.

Gestione delle Zone di Sovrapposizione UTM

Lungo i confini tra fusi UTM adiacenti, esiste una certa ambiguità: un punto fisico sulla superficie terrestre può essere rappresentato utilizzando le coordinate del fuso a est oppure del fuso a ovest. Nella pratica, si adotta convenzionalmente il fuso nel quale il punto ricade, ma molte applicazioni implementano zone di sovrapposizione nelle quali entrambi i sistemi di coordinate sono validi.

Una strategia comune consiste nell'estendere ogni fuso di $0,5^\circ$ oltre i suoi confini nominali, creando una zona di sovrapposizione di un grado di longitudine tra fusi adiacenti. All'interno di queste zone, gli utenti possono scegliere il fuso più conveniente per le loro applicazioni, ad esempio quello che minimizza le distorsioni o quello utilizzato per dati adiacenti con cui si deve mantenere consistenza.

La trasformazione tra coordinate di fusi diversi richiede il passaggio attraverso coordinate geografiche come sistema intermedio: si convertono le coordinate UTM del primo fuso in latitudine e longitudine, e quindi si riconvertono queste coordinate geografiche nel secondo fuso UTM. Questo processo garantisce la consistenza geometrica ma introduce errori numerici cumulativi che possono raggiungere qualche millimetro per trasformazioni multiple.

Datum Geodetici e Sistemi di Riferimento

Concetto di Datum Geodetico

Un datum geodetico costituisce la fondazione matematica e fisica di ogni sistema di coordinate terrestri. Mentre le proiezioni cartografiche come UTM definiscono la trasformazione dalla superficie curva al piano, il datum specifica la superficie di riferimento stessa, la sua forma, dimensioni, orientamento e posizione rispetto al corpo fisico della Terra. La definizione precisa di un datum è essenziale per garantire che coordinate misurate in epoche diverse, da diversi osservatori o con differenti tecnologie possano essere correttamente interpretate e confrontate.

Un datum geodetico completo è costituito da diversi elementi interconnessi. Il primo elemento è l'ellissoide di riferimento, una superficie matematica regolare che approssima la forma della Terra. L'ellissoide è specificato mediante due parametri: il semiasse equatoriale a , che definisce la dimensione, e lo schiacciamento $f = (a - b)/a$, dove b è il semiasse polare,

che quantifica la deviazione dalla sfericità. In alternativa, alcuni datum specificano direttamente il semiasse polare b , oppure forniscono la prima eccentricità $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$.

Il secondo elemento fondamentale è l'orientamento dell'ellissoide. Questo comprende la definizione dell'asse polare, convenzionalmente allineato con l'asse medio di rotazione terrestre (considerando le variazioni polari), e la definizione del meridiano origine, convenzionalmente il meridiano di Greenwich. L'orientamento stabilisce la corrispondenza tra le coordinate geografiche (φ, λ) sull'ellissoide e le direzioni fisiche sulla Terra.

Il terzo elemento è la posizione del centro dell'ellissoide rispetto al centro di massa terrestre. I datum geocentrici moderni sono definiti con il centro dell'ellissoide coincidente con il geocentro, il centro di massa del sistema Terra (comprendente crosta, mantello, nucleo, oceani, atmosfera). I datum locali o regionali precedenti, invece, erano spesso definiti con l'ellissoide ottimizzato per adattarsi alla superficie terrestre in una particolare regione, risultando in un centro spostato rispetto al geocentro di centinaia di metri.

Il quarto elemento, presente nei datum moderni, è la definizione dell'epoca di riferimento. Poiché la crosta terrestre è soggetta a movimenti tettonici, deformazioni crostali, subsidenza e altri fenomeni geodinamici, le coordinate di punti fissi sulla superficie variano nel tempo. Un datum moderno specifica non solo la posizione dei punti di riferimento a una determinata epoca, ma anche, quando disponibili, le loro velocità di movimento.

Ellissoidi Geodetici Storici e Moderni

La storia della geodesia è caratterizzata dalla progressiva determinazione sempre più accurata dei parametri dell'ellissoide terrestre. I primi modelli sferici furono sostituiti nel diciottesimo secolo da ellissoidi di rotazione dopo che misurazioni accurate di archi meridiani rivelarono lo schiacciamento polare.

L'ellissoide di Bessel del 1841, con $a = 6.377.397,155$ metri e $f = 1/299,1528128$, fu ampiamente utilizzato in Europa centrale e in altre regioni per oltre un secolo. L'ellissoide internazionale di Hayford del 1909, adottato nel 1924 come ellissoide di riferimento internazionale, aveva parametri $a = 6.378.388,0$ metri e $f = 1/297,0$, ed fu utilizzato in molti datum europei fino alla fine del ventesimo secolo.

Il Geodetic Reference System del 1967 (GRS67) introdusse l'ellissoide con $a = 6.378.160,0$ metri e $f = 1/298,247$, basato su misurazioni gravimetriche e geodetiche più accurate. Questo fu rapidamente sostituito dal GRS80 nel 1980, con parametri $a = 6.378.137,0$ metri e $f = 1/298,257222101$, che rimane uno degli ellissoidi di riferimento standard per molte applicazioni geodetiche.

L'ellissoide WGS84, adottato dal sistema GPS (Global Positioning System), ha parametri quasi identici al GRS80: $a = 6.378.137,0$ metri e $f = 1/298,257223563$. La differenza nel valore dello schiacciamento (circa 0,1 millimetri nel semiasse polare) è praticamente trascurabile per la maggior parte delle applicazioni.

È importante sottolineare che l'ellissoide di riferimento è una superficie puramente matematica, definita da equazioni e parametri numerici. La sua relazione con la superficie fisica della Terra, complessa e irregolare, è mediata attraverso il concetto di geoidi,

discusso più avanti. L'ellissoide non coincide con la superficie topografica (che presenta montagne e valli con variazioni di diversi chilometri) né con il livello medio del mare (che è ondulato a causa delle variazioni gravitazionali).

Il World Geodetic System 1984 (WGS84)

Il World Geodetic System 1984 rappresenta il datum geodetico di riferimento globale più importante e ampiamente utilizzato nel mondo contemporaneo. Sviluppato dal Dipartimento della Difesa degli Stati Uniti per supportare le operazioni del sistema GPS, il WGS84 è diventato de facto lo standard mondiale per posizionamento globale, navigazione, cartografia e innumerevoli applicazioni geospaziali.

La prima realizzazione del WGS84, denominata WGS84 (Original) o WGS84(G0), fu completata nel 1987. Successivamente, il sistema è stato ripetutamente raffinato attraverso una serie di realizzazioni sempre più accurate, denominate WGS84(G730), WGS84(G873), WGS84(G1150), WGS84(G1674) e WGS84(G2139), dove il numero tra parentesi indica la settimana GPS della realizzazione. Ogni nuova realizzazione incorpora misurazioni GPS più estese, algoritmi migliorati e una più accurata determinazione dell'orientamento e del centro di massa.

L'ellissoide WGS84 è definito dai seguenti parametri fondamentali:

- Semiasse equatoriale: $a = 6.378.137,0$ metri (esatto per definizione)
- Schiacciamento: $f = 1/298,257223563$
- Semiasse polare: $b = a(1 - f) = 6.356.752,3142$ metri
- Prima eccentricità al quadrato: $e^2 = f(2 - f) = 0,00669437999014$

Oltre ai parametri geometrici, il WGS84 definisce la costante gravitazionale geocentrica $GM = 3,986004418 \times 10^{14}$ metri cubi al secondo quadrato e la velocità angolare di rotazione terrestre $\omega = 7,292115 \times 10^{-5}$ radianti al secondo. Questi parametri aggiuntivi sono essenziali per calcoli che coinvolgono la gravità terrestre e le forze centrifughe.

Il sistema di coordinate cartesiane geocentriche WGS84 (X, Y, Z) è definito con origine nel geocentro (centro di massa della Terra, comprese le masse oceaniche e atmosferiche), asse Z diretto verso il Polo Nord convenzionale (Conventional Terrestrial Pole), asse X giacente nel piano del meridiano di riferimento (origine delle longitudini, che coincide con accuratezza di circa 100 metri con il meridiano di Greenwich), e asse Y completante un sistema destrorso, diretto a 90° est.

La trasformazione tra coordinate cartesiane geocentriche (X, Y, Z) e coordinate geografiche (φ , λ , h), dove h è l'altezza ellissoidale sopra l'ellissoide WGS84, è data da:

$$X = (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \quad Y = (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \quad Z = (N(1 - e^2) + h) \sin \varphi$$

dove $N = a/\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$ è il raggio di curvatura del primo verticale. La trasformazione inversa richiede un processo iterativo o formule analitiche approssimate più complesse.

Il North American Datum 1983 (NAD83)

Il North American Datum 1983 costituisce il sistema di riferimento geodetico ufficiale per il Nord America, sviluppato per sostituire il precedente NAD27 basato sull'ellissoide di Clarke del 1866. Il NAD83 utilizza l'ellissoide GRS80, che come precedentemente notato ha parametri praticamente identici all'ellissoide WGS84.

Nonostante l'identità degli ellipsoidi di riferimento, il NAD83 e il WGS84 sono sistemi di coordinate distinti perché differiscono nella loro realizzazione fisica: la posizione e orientamento del sistema di riferimento rispetto alla crosta terrestre. Il NAD83 originale fu definito tramite misurazioni geodetiche terrestri (triangolazioni, trilaterazioni, livellazioni) effettuate nel Nord America e aggiustate in un unico sistema coerente. La sua origine era in teoria geocentrica, ma nella pratica le limitazioni delle misurazioni terrestri producevano deviazioni dal geocentro di qualche metro.

Con l'avvento del GPS e delle tecniche geodetiche spaziali, il NAD83 è stato ripetutamente aggiornato attraverso una serie di "aggiustamenti" o realizzazioni, mantenendo compatibilità con le coordinate esistenti sulla placca nordamericana ma migliorando l'accuratezza assoluta. Le principali realizzazioni includono NAD83(CORS), NAD83(2011) e NAD83(MA11), dove CORS si riferisce alla rete di stazioni permanenti GPS, e MA11 è l'aggiustamento multi-anno del 2011.

Una caratteristica fondamentale del NAD83 moderno è che è un sistema di riferimento "ancorato alla placca", nel senso che le coordinate dei punti sulla placca nordamericana rimangono sostanzialmente costanti nel tempo nonostante il movimento tettonico della placca rispetto al geocentro. Questo è ottenuto mediante aggiornamenti periodici delle coordinate dei punti di riferimento per compensare la deriva tettonica, mantenendo così la stabilità del sistema per applicazioni cartografiche regionali.

La differenza tra coordinate WGS84 e NAD83 per uno stesso punto fisico varia geograficamente e temporalmente. In alcune regioni del Nord America, questa differenza può raggiungere due metri in epoca moderna, crescendo nel tempo a causa del movimento tettonico della placca nordamericana (che si sposta verso ovest-sudovest rispetto al riferimento globale WGS84/ITRF a circa 15-25 millimetri all'anno).

Datum Locali Europei: ED50, ED79, ED87

Prima dell'adozione di sistemi globali come WGS84 e ETRS89, la cartografia europea era basata su una varietà di datum nazionali e regionali, ciascuno ottimizzato per la propria area geografica. Il European Datum 1950 (ED50) rappresentò il primo tentativo importante di unificare i sistemi geodetici europei in un framework continentale coerente.

Il datum ED50 utilizza l'ellissoide internazionale di Hayford del 1924 con parametri $a = 6.378.388,0$ metri e $f = 1/297,0$. Il punto fondamentale (datum origin) del sistema è a Potsdam, Germania, dove furono stabilite coordinate e azimuth iniziali. Il sistema ED50 fu realizzato mediante una vasta triangolazione geodetica che connetteva le reti nazionali di molti paesi europei. A causa delle limitazioni delle tecniche geodetiche terrestri dell'epoca e della necessità di connettere reti esistenti con distorsioni ereditate, il centro dell'ellissoide ED50 è spostato rispetto al geocentro di circa 150 metri.

Il datum ED50 fu ampiamente utilizzato per cartografia militare e civile in Europa durante la Guerra Fredda e rimane ancora in uso in alcune applicazioni legacy. Tuttavia, presenta limitazioni significative: l'accuratezza relativa interna è dell'ordine del metro su distanze continentali, l'orientamento non è ottimale secondo gli standard moderni, e la natura non geocentrica lo rende incompatibile con tecniche di posizionamento satellitare.

Successivi miglioramenti produssero l'European Datum 1979 (ED79) e l'European Datum 1987 (ED87), che incorporarono misurazioni satellitari (principalmente dal sistema Transit/NNSS) per migliorare la definizione geocentrica e l'accuratezza globale. Tuttavia, questi sistemi furono rapidamente superati dall'avvento del GPS e dalla definizione dell'European Terrestrial Reference System 1989.

L'European Terrestrial Reference System 1989 (ETRS89)

Il sistema ETRS89 (European Terrestrial Reference System 1989) rappresenta il datum geodetico ufficiale per l'Europa, adottato da molti paesi europei per sostituire i datum locali precedenti. Il sistema fu stabilito nel 1989 dalla sottocommissione EUREF (European Reference Frame) dell'Associazione Internazionale di Geodesia.

L'ETRS89 utilizza l'ellissoide GRS80 (identico per scopi pratici al WGS84) ed è definito come coincidente con il sistema globale ITRS (International Terrestrial Reference System) all'epoca 1989,0. In quella data di riferimento, l'ETRS89 e l'ITRS condividevano la stessa definizione di origine, orientamento e scala. Tuttavia, la caratteristica distintiva fondamentale dell'ETRS89 è che esso è rigidamente connesso alla placca tettonica eurasiatica.

Poiché la placca eurasiatica si muove rispetto al sistema di riferimento globale ITRF (International Terrestrial Reference Frame, la realizzazione pratica dell'ITRS) con velocità di circa 25 millimetri all'anno verso nordest, l'ETRS89 si è progressivamente allontanato dall'ITRF. Alla data corrente del 2026, la differenza tra coordinate ETRS89 e ITRF per uno stesso punto sulla placca eurasiatica è di circa 90 centimetri in direzione nordest. Questa deriva continua ad accumularsi al ritmo della velocità tettonica della placca.

La scelta di un sistema ancorato alla placca per l'Europa è motivata da considerazioni pratiche: mantiene stabili nel tempo le coordinate dei punti sulla crosta terrestre, evitando la necessità di aggiornare continuamente mappe, database catastali e infrastrutture geodetiche per compensare il movimento tettonico. Per la maggior parte delle applicazioni terrestri regionali (navigazione, cartografia, catasto), la stabilità rispetto alla crosta locale è più importante della coerenza con un sistema globale geocentrico.

La realizzazione pratica dell'ETRS89 è effettuata attraverso una rete di stazioni permanenti GPS/GNSS distribuite in tutta Europa, coordinate dal progetto EUREF Permanent Network (EPN). Le coordinate di queste stazioni di riferimento vengono determinate con tecniche geodetiche spaziali di alta precisione e servono come fondazione per tutte le attività di posizionamento e cartografia nel continente europeo.

Trasformazioni tra Datum: Fondamenti Teorici

La necessità di trasformare coordinate da un datum a un altro è ubiqua nella pratica geodetica e cartografica moderna. Dati storici, mappe esistenti, database legacy possono

essere riferiti a datum diversi da quello utilizzato per nuove osservazioni o applicazioni. La trasformazione accurata tra datum è essenziale per integrare informazioni provenienti da fonti diverse e per garantire la coerenza spaziale.

La trasformazione tra due datum geodetici può essere concettualizzata come la combinazione di una trasformazione tra i sistemi di coordinate cartesiane geocentriche associati ai due datum (trasformazione nello spazio tridimensionale) e delle trasformazioni da/a coordinate geografiche. Il nucleo del problema è quindi la trasformazione tra i due sistemi cartesiani tridimensionali (X_1, Y_1, Z_1) e (X_2, Y_2, Z_2) .

Nel caso più generale, la relazione tra le coordinate cartesiane nei due sistemi può coinvolgere traslazioni (spostamento dell'origine), rotazioni (cambiamento dell'orientamento degli assi) e un cambiamento di scala. Questo tipo di trasformazione, nota come trasformazione di similarità tridimensionale o trasformazione di Helmert, è caratterizzata da sette parametri indipendenti.

I sette parametri della trasformazione di Helmert comprendono tre traslazioni $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$, che specificano il vettore di spostamento tra le origini dei due sistemi, tre rotazioni angolari $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)$ attorno agli assi coordinati, che descrivono la differenza di orientamento, e un fattore di scala δ che esprime la differenza nelle unità di misura o nella determinazione della scala assoluta.

Le equazioni della trasformazione di Helmert possono essere scritte in forma matriciale come:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + (1+\delta) \begin{bmatrix} 1 & -\epsilon_z & \epsilon_y \\ \epsilon_z & 1 & -\epsilon_x \\ -\epsilon_y & \epsilon_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

dove le rotazioni $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ sono tipicamente piccoli angoli (ordine di secondi d'arco o microradiani) e il fattore di scala δ è tipicamente una quantità molto piccola (ordine di parti per milione).

Per rotazioni piccole, la matrice di rotazione può essere approssimata linearmente come mostrato. Per trasformazioni che coinvolgono rotazioni maggiori o quando è richiesta la massima precisione, è necessario utilizzare la formulazione completa non lineare delle matrici di rotazione.

Determinazione dei Parametri di Trasformazione

I parametri della trasformazione di Helmert tra due datum vengono determinati utilizzando un insieme di punti di controllo le cui coordinate sono note in entrambi i sistemi. Questi punti possono essere monumenti geodetici le cui coordinate sono state misurate indipendentemente in entrambi i datum, oppure possono essere stazioni GPS permanenti per le quali sono disponibili coordinate elaborate in diversi sistemi di riferimento.

Il metodo standard per determinare i parametri è il metodo dei minimi quadrati. Dati n punti di controllo (con $n \geq 3$ per determinare univocamente i sette parametri), si costruisce un sistema di $3n$ equazioni lineari nelle sette incognite $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \delta)$. Poiché $n \geq 3$

tipicamente maggiore di 3, il sistema è sovradeterminato e viene risolto mediante il metodo dei minimi quadrati, che trova i parametri che minimizzano la somma dei quadrati dei residui.

La qualità della trasformazione dipende criticamente da diversi fattori: il numero di punti di controllo utilizzati (più punti forniscono maggiore ridondanza e permettono di rilevare errori grossolani), la distribuzione geometrica dei punti di controllo (punti ben distribuiti nello spazio tridimensionale forniscono una migliore determinazione dei parametri di rotazione e scala), l'accuratezza delle coordinate dei punti nei due sistemi (errori nelle coordinate di controllo si propagano nei parametri di trasformazione) e l'adeguatezza del modello di trasformazione (la trasformazione di Helmert a sette parametri assume che la relazione tra i due datum sia una similarità rigida, che può non essere perfettamente soddisfatta in presenza di deformazioni crostali differenziali).

Trasformazione WGS84 ↔ ED50: Parametri e Procedure

La trasformazione tra il datum globale WGS84 e il datum europeo ED50 è una delle trasformazioni più importanti nella pratica cartografica europea, necessaria per integrare dati GPS moderni con cartografia storica. A causa della natura locale dell'ED50, ottimizzato per diverse regioni europee mediante aggiustamenti locali, non esiste un unico insieme di parametri di trasformazione valido uniformemente per tutta l'Europa.

Diverse organizzazioni hanno pubblicato insiemi di parametri per specifiche regioni o paesi. Ad esempio, per l'Europa centrale, un insieme di parametri comunemente utilizzato è:

$\Delta X = -87$ metri $\Delta Y = -98$ metri $\Delta Z = -121$ metri $\epsilon_x = 0,0$ secondi d'arco $\epsilon_y = 0,0$ secondi d'arco $\epsilon_z = 0,0$ secondi d'arco $\delta = 0,0$ ppm

Questi parametri rappresentano una trasformazione puramente traslazionale (senza rotazioni né cambiamento di scala), appropriata per trasformazioni approssimate su aree regionali. Per l'Italia, parametri leggermente diversi possono essere più accurati, riflettendo le caratteristiche specifiche della realizzazione dell'ED50 nella regione italiana.

Per applicazioni che richiedono maggiore accuratezza, esistono trasformazioni a sette parametri completi, che includono rotazioni e fattore di scala. Ad esempio, per la penisola iberica, sono stati determinati parametri:

$\Delta X = -84,100$ metri $\Delta Y = -97,530$ metri
 $\Delta Z = -119,980$ metri $\epsilon_x = -0,005$ secondi d'arco $\epsilon_y = 0,554$ secondi d'arco $\epsilon_z = -0,220$ secondi d'arco $\delta = 1,237$ ppm

La procedura operativa per trasformare coordinate da ED50 a WGS84 prevede i seguenti passi:

1. Se le coordinate iniziali sono in formato geografico (ϕ , λ , h) su ED50, convertirle in coordinate cartesiane geocentriche (X_1 , Y_1 , Z_1) utilizzando l'ellissoide di Hayford e le formule di conversione standard.

2. Applicare la trasformazione di Helmert con i parametri appropriati per ottenere le coordinate cartesiane nel sistema WGS84: (X_2, Y_2, Z_2) .
3. Convertire le coordinate cartesiane WGS84 in coordinate geografiche (φ, λ, h) sull'ellissoide WGS84.

Gli errori nella trasformazione dipendono dall'accuratezza dei parametri utilizzati e dalla rappresentatività della trasformazione per la specifica località. In generale, trasformazioni standardizzate possono introdurre errori dell'ordine di 5-10 metri, mentre trasformazioni ottimizzate localmente con parametri determinati specificamente per una regione possono ridurre gli errori a 1-2 metri.

Il Geoide e le Ondulazioni Geoidali

Definizione Fisica del Geoide

Il geoide rappresenta la superficie equipotenziale del campo gravitazionale terrestre che meglio approssima il livello medio degli oceani indisturbati, esteso idealmente sotto i continenti. Questa definizione, apparentemente semplice, nasconde una complessità fisica e concettuale considerevole che richiede una comprensione approfondita della teoria del potenziale gravitazionale e delle scienze geodetiche.

Il campo gravitazionale terrestre è determinato dalla distribuzione delle masse all'interno e sulla superficie del pianeta. La densità della crosta, del mantello e del nucleo terrestre varia spazialmente a causa della composizione litologica eterogenea, delle strutture tettoniche, delle anomalie termiche e di innumerevoli altri fattori geologici e geofisici. Queste variazioni di densità producono variazioni nel campo gravitazionale che possono essere misurate mediante gravimetri terrestri, aerei e satellitari.

Il potenziale gravitazionale W in un punto dello spazio è definito come la somma del potenziale gravitazionale newtoniano (dovuto all'attrazione delle masse) e del potenziale centrifugo (dovuto alla rotazione terrestre). Matematicamente:

$$W(r) = U(r) + \Phi(r)$$

dove $U(r)$ è il potenziale gravitazionale newtoniano e $\Phi(r) = (1/2)\omega^2(x^2 + y^2)$ è il potenziale centrifugo, con ω velocità angolare di rotazione terrestre e (x, y) coordinate nel piano equatoriale.

Il vettore accelerazione gravitazionale g (comunemente chiamato "gravità") è il gradiente negativo del potenziale:

$$g = -\nabla W$$

Le superfici equipotenziali sono definite dall'equazione $W(r) = \text{costante}$. Su una superficie equipotenziale, il potenziale ha ovunque lo stesso valore, e il vettore gravità è perpendicolare alla superficie in ogni punto. Questa proprietà ha un significato fisico

fondamentale: un corpo libero in equilibrio su una superficie equipotenziale non tende a muoversi, poiché tutte le direzioni sulla superficie sono equivalenti dal punto di vista gravitazionale.

Il geoide è definito come la particolare superficie equipotenziale che coincide con il livello medio del mare nelle regioni oceaniche. Il valore del potenziale sul geoide è convenzionalmente denotato W_0 . Misurazioni mareografiche pluriennali stabiliscono che $W_0 \approx 62.636.856,0$ metri quadrati al secondo quadrato, sebbene la determinazione precisa di questo valore rimanga un'area di ricerca attiva in geodesia fisica.

Relazione tra Geoide ed Ellissoide: Ondulazione Geoidale

L'ellissoide di riferimento è una superficie matematica regolare e geometricamente semplice, definita da due soli parametri. Il geoide, al contrario, è una superficie fisica irregolare che riflette la complessa distribuzione delle masse terrestri. La separazione verticale tra queste due superfici è chiamata ondulazione geoidale, altezza geoidale o separazione geoide-ellissoide, comunemente denotata con il simbolo N .

In un punto specificato da coordinate geografiche (φ, λ) , l'ondulazione geoidale $N(\varphi, \lambda)$ è definita come la distanza, misurata lungo la normale all'ellissoide, tra l'ellissoide e il geoide. Per convenzione, N è positiva quando il geoide si trova sopra l'ellissoide e negativa quando si trova sotto.

Le ondulazioni geoidali variano globalmente in un intervallo di circa 200 metri. Il valore minimo globale, circa -107 metri, si trova nell'Oceano Indiano meridionale vicino allo Sri Lanka, in una regione associata a un'anomalia gravitazionale negativa di grande scala. Il valore massimo, circa +85 metri, si trova nella regione della Nuova Guinea, nell'Oceano Pacifico occidentale. Queste variazioni riflettono anomalie di massa su scala litosferica associate a strutture tettoniche profonde, variazioni di densità mantellica e processi geodinamici.

A scala regionale, le ondulazioni geoidali sono tipicamente molto più moderate. In Europa, i valori di N variano approssimativamente tra +40 metri e +55 metri. In Italia, l'ondulazione geoidale varia tra circa +45 metri nelle regioni tirreniche e circa +50 metri nelle regioni adriatiche, con gradienti relativamente dolci dell'ordine di pochi centimetri per chilometro in pianura, ma localmente più ripidi in corrispondenza di anomalie gravimetriche associate a strutture geologiche.

La relazione tra tre tipi di altezza è fondamentale per applicazioni geodetiche pratiche:

- L'altezza ellissoidale h , misurata lungo la normale all'ellissoide dalla superficie dell'ellissoide al punto
- L'altezza ortometrica H , misurata lungo la verticale fisica (linea di forza del campo gravitazionale) dal geoide al punto
- L'ondulazione geoidale N , separazione tra ellissoide e geoide

Questi tre quantitativi sono legati dall'equazione approssimata:

$$h \approx H + N$$

Questa relazione è rigorosamente valida solo se la verticale fisica e la normale all'ellissoide coincidono, il che è vero con buona approssimazione nella maggior parte dei casi pratici. La deviazione tra queste due direzioni, chiamata deviazione della verticale, è tipicamente dell'ordine di secondi d'arco e può essere trascurata per molte applicazioni, ma deve essere considerata in lavori geodetici di alta precisione.

Determinazione del Geoide: Metodi Gravimetrici

La determinazione della forma del geoide richiede misurazioni estensive del campo gravitazionale terrestre. Il metodo classico, sviluppato nel diciannovesimo e ventesimo secolo, si basa su osservazioni gravimetriche terrestri integrate mediante tecniche matematiche di geodesia fisica.

Il punto di partenza è la misurazione dell'accelerazione gravitazionale g in una rete di stazioni distribuite sulla superficie terrestre. Gravimetri assoluti, che misurano g mediante interferometria laser su masse in caduta libera, possono determinare l'accelerazione gravitazionale con accuratezza dell'ordine di 10^{-8} metri al secondo quadrato. Gravimetri relativi, che misurano differenze di gravità mediante sistemi massa-molla, raggiungono sensibilità di 10^{-9} metri al secondo quadrato ma richiedono calibrazione assoluta.

Le misurazioni gravimetriche devono essere corrette per diversi effetti sistematici. La correzione in aria libera compensa la variazione di gravità con l'altitudine: g decresce di circa $3,086 \times 10^{-6}$ metri al secondo quadrato per metro di elevazione. La correzione di Bouguer rimuove l'effetto gravitazionale della massa topografica tra il punto di osservazione e il geoide. La correzione di terreno tiene conto delle irregolarità topografiche locali. Dopo l'applicazione di tutte queste correzioni, si ottiene l'anomalia gravitazionale, che riflette le variazioni di densità sotterranee.

La relazione tra anomalie gravitazionali e ondulazioni geoidali è fornita dalla formula integrale di Stokes, un risultato fondamentale della teoria del potenziale. Per un punto P sulla superficie terrestre, l'ondulazione geoidale $N(P)$ può essere espressa come un integrale sulla sfera delle anomalie gravitazionali Δg :

$$N(P) = (R/4\pi\gamma) \iint \sigma \Delta g(Q) S(\psi) d\sigma$$

dove R è il raggio medio terrestre, γ è il valore normale della gravità sull'ellissoide, ψ è l'angolo sferico tra i punti P e Q , $S(\psi)$ è la funzione kernel di Stokes, e l'integrale è esteso all'intera sfera σ .

La funzione kernel di Stokes ha la forma:

$$S(\psi) = 1/\sin(\psi/2) - 6\sin(\psi/2) + 1 - 5\cos \psi - 3\cos \psi \ln[\sin(\psi/2) + \sin^2(\psi/2)]$$

Questa funzione presenta una singolarità logaritmica per $\psi \rightarrow 0$, il che significa che le anomalie gravitazionali vicine al punto di calcolo contribuiscono fortemente all'ondulazione geoidale, mentre le anomalie lontane contribuiscono in modo decrescente.

La formula di Stokes è esatta solo per superfici sferiche con massa distribuita in un guscio superficiale. Per la Terra reale, che ha topografia e massa distribuita in volume, sono

necessarie correzioni aggiuntive, tra cui la riduzione isostatica che tiene conto della compensazione gravitazionale delle masse topografiche da parte di deficit di densità a profondità crostali.

Geodesia Satellitare e Modelli Geopotenziali Globali

L'avvento dell'era spaziale ha rivoluzionato la determinazione del geoide mediante l'osservazione di satelliti artificiali. Le orbite dei satelliti sono perturbate dal campo gravitazionale terrestre in modo misurabile e prevedibile. Analizzando accuratamente le traiettorie satellitari, è possibile dedurre inversamente le caratteristiche del campo gravitazionale.

Il potenziale gravitazionale esterno alla Terra (al di fuori delle masse terrestri) può essere espanso in una serie di armoniche sferiche:

$$U(r, \varphi, \lambda) = (GM/r) \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (a/r)^n P_n(\sin \varphi) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \right]$$

dove GM è la costante gravitazionale geocentrica, a è il raggio equatoriale di riferimento, P_n sono le funzioni associate di Legendre, e C_{nm} , S_{nm} sono i coefficienti armonici sferici normalizzati che caratterizzano il campo gravitazionale.

I coefficienti di basso grado (n piccolo) rappresentano le caratteristiche su larga scala del campo gravitazionale. Il coefficiente C_{20} , anche indicato come J_2 , rappresenta lo schiacciamento gravitazionale e ha valore dell'ordine di -10^{-3} . I coefficienti C_{21} e S_{21} rappresenterebbero un'asimmetria equatoriale nord-sud, che per la Terra è praticamente nulla. I coefficienti C_{22} e S_{22} rappresentano l'ellitticità equatoriale, leggermente diversa da zero.

I coefficienti di grado elevato (n grande) catturano le caratteristiche a scala fine del campo gravitazionale. La risoluzione spaziale associata al grado n è approssimativamente $\lambda \approx 20.000 \text{ km} / n$. Per risolvere strutture di 100 chilometri, è necessario uno sviluppo fino a $n \approx 200$. Per risolvere strutture di 10 chilometri, serve $n \approx 2000$, il che richiede milioni di coefficienti.

Diverse missioni satellitari dedicate hanno prodotto modelli geopotenziali globali sempre più accurati. Il modello EGM96 (Earth Gravitational Model 1996), sviluppato dalla National Geospatial-Intelligence Agency degli Stati Uniti, fornisce coefficienti armonici fino al grado 360, corrispondente a una risoluzione di circa 55 chilometri. Il modello incorpora dati da satelliti geodetici come LAGEOS e da altimetria radar oceanica.

La missione GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment), lanciata nel 2002, ha utilizzato una coppia di satelliti in formazione che misurano continuamente la loro separazione reciproca mediante un sistema di ranging a microonde. Le variazioni di distanza tra i satelliti, causate dalle anomalie gravitazionali lungo l'orbita, permettono di determinare il campo gravitazionale con risoluzione spaziale di circa 300-400 chilometri e accuratezza senza precedenti. GRACE ha anche permesso di monitorare variazioni temporali del campo gravitazionale causate da redistribuzioni di massa idrologica, glaciale e oceanica.

La missione GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer), operativa dal 2009 al 2013, ha utilizzato un gradiometro gravitazionale a bordo di un satellite in orbita estremamente bassa (circa 260 chilometri di altitudine) per misurare direttamente i gradienti del campo gravitazionale. I dati GOCE hanno permesso di determinare il geode con accuratezza di 1-2 centimetri su scale spaziali di circa 100 chilometri.

Il modello geopotenziale globale più recente e accurato, EGM2008, combina osservazioni satellitari con dati gravimetrici terrestri e altimetria marina. Esso fornisce coefficienti armonici fino al grado 2190, corrispondente a una risoluzione di circa 9 chilometri, con accuratezza dell'ondulazione geoidale stimata in 5-10 centimetri nelle regioni ben osservate.

Modelli Geoidali Regionali e Locali

Sebbene i modelli geopotenziali globali forniscano una rappresentazione uniforme del geode su tutto il pianeta, applicazioni geodetiche nazionali e regionali richiedono spesso modelli geoidali di accuratezza superiore, tipicamente a livello del centimetro o migliore, su aree geografiche limitate.

I modelli geoidali regionali vengono costruiti combinando diverse fonti di informazione: il modello geopotenziale globale fornisce la struttura a lunga lunghezza d'onda (basse frequenze spaziali), misurazioni gravimetriche terrestri ad alta densità catturano le variazioni regionali e locali (alte frequenze spaziali), e dati da livellazione geodetica e stazioni GPS forniscono vincoli assoluti.

La tecnica standard per la combinazione di queste informazioni è il metodo remove-restore. Si calcola prima l'effetto del modello globale e della topografia (che può essere modellata utilizzando modelli digitali di elevazione), ottenendo un campo gravitazionale residuo. Questo residuo, che contiene le anomalie non spiegate dal modello globale, viene interpolato utilizzando tecniche di collocation o di kriging per produrre una superficie residuale. Infine, si restaurano gli effetti precedentemente rimossi per ottenere il modello geoidale completo.

In Italia, il modello geoidale di riferimento è ITALGEO, sviluppato dall'Istituto Geografico Militare e successivamente aggiornato. Versioni più recenti come ITALGEO2005 incorporano dati da circa 30.000 stazioni gravimetriche terrestri, insieme a dati da GRACE, GOCE e livellazione di alta precisione. L'accuratezza stimata è di circa 2-3 centimetri su tutto il territorio nazionale.

Per applicazioni catastali e topografiche di altissima precisione, possono essere necessari modelli geoidali locali con accuratezza millimetrica. Questi richiedono campagne gravimetriche dedicate con densità di osservazione molto elevata, dell'ordine di una stazione per chilometro quadrato o superiore, e l'integrazione con misurazioni GPS/livellazione su capisaldi geodetici locali.

Sistemi di Altitudine e Livellazione Geodetica

La determinazione accurata delle altitudini è un problema geodetico classico di grande importanza pratica per ingegneria civile, idrologia, scienze ambientali e molte altre

applicazioni. Diversi sistemi di altitudine sono stati definiti e utilizzati nel corso della storia della geodesia, ciascuno con caratteristiche e limitazioni specifiche.

L'altezza ortometrica H , precedentemente menzionata, è definita come la distanza dal geoide al punto, misurata lungo la linea di forza del campo gravitazionale (verticale fisica). Questa è l'altitudine "naturale" nel senso che l'acqua fluisce da punti di altezza ortometrica maggiore verso punti di altezza minore. Le altezze ortometriche sono determinate mediante livellazione geodetica, una tecnica che misura differenze di livello tra punti consecutivi lungo una linea di livellazione.

La livellazione geodetica di precisione utilizza livelli automatici o digitali che misurano differenze di quota con accuratezza sub-millimetrica su distanze di decine o centinaia di metri. Per determinare l'altezza ortometrica, tuttavia, è necessario conoscere anche il valore della gravità lungo la verticale tra il geoide e il punto, poiché le differenze di potenziale misurate dalla livellazione devono essere convertite in differenze geometriche di altezza.

Le altezze dinamiche sono definite utilizzando il potenziale gravitazionale normalizzato a un valore standard di gravità. Due punti con la stessa altezza dinamica si trovano sulla stessa superficie equipotenziale e sono quindi alla stessa "quota energetica". Le altezze dinamiche sono utili per applicazioni idrologiche ma non corrispondono direttamente a distanze geometriche.

Le altezze normali, introdotte dal geodeta russo Molodensky, sono definite rispetto al quasigeoid, una superficie ausiliaria molto vicina al geoide ma definita matematicamente in modo da evitare la necessità di ipotesi sulla distribuzione delle masse interne. Le altezze normali sono determinate assegnando a ogni punto il potenziale gravitazionale effettivo misurato, ma calcolando l'altezza utilizzando un campo gravitazionale normale teorico (corrispondente all'ellissoide).

La differenza tra altezza ortometrica e altezza normale, chiamata anomalia di altezza, è tipicamente dell'ordine di pochi centimetri, ma può raggiungere decimetri in regioni montagnose con forti anomalie gravitazionali. La scelta tra sistemi di altitudine diversi dipende dall'applicazione specifica e dalla disponibilità di informazioni gravimetriche.

Sistemi di Livellazione Nazionali e Datum Verticali

Ogni nazione mantiene tipicamente una propria rete di livellazione nazionale, costituita da capisaldi monumentati le cui altitudini sono determinate mediante livellazione geodetica a partire da uno o più mareografi che definiscono il datum verticale (origine delle altitudini). La scelta del mareografo di riferimento e dell'epoca delle osservazioni marea determina il livello zero del sistema di altitudini nazionale.

In Italia, il sistema altimetrico di riferimento è basato sul mareografo di Genova, dove il livello medio del mare fu determinato mediante osservazioni pluriennali. Le altitudini italiane, indicate come "quote sul livello del mare di Genova", sono altezze ortometriche riferite a questo datum verticale. La rete di livellazione di alta precisione (RNAP - Rete Nazionale di Alta Precisione) copre l'intero territorio nazionale con una rete di linee di livellazione che connettono circa 150.000 capisaldi.

Diversi paesi europei hanno storicamente utilizzato datum verticali differenti, basati su mareografi diversi e epoche diverse. Questo ha creato inconsistenze nelle altitudini transfrontaliere, con differenze sistematiche che possono raggiungere diversi decimetri tra sistemi nazionali adiacenti. Il progetto European Vertical Reference System (EVRS) mira a unificare i datum verticali europei in un sistema coerente basato su una rete di livellazione continentale (European Levelling Network) e su un geoide di riferimento comune.

L'avvento del GPS ha introdotto una nuova dimensione nella determinazione delle altitudini. Il GPS misura direttamente altezze ellissoidali h rispetto all'ellissoide WGS84. Per convertire queste in altezze ortometriche praticamente utilizzabili, è necessario conoscere l'ondulazione geoidale N : $H = h - N$. Questa conversione richiede un modello geoidale accurato e introduce una dipendenza dell'altitudine ortometrica derivata da GPS sulla qualità del modello geoidale utilizzato.

Variazioni Temporal del Geode

Il geode non è una superficie statica ma evolve nel tempo in risposta a redistribuzioni di massa all'interno e sulla superficie del pianeta. Queste variazioni temporali possono essere classificate in diverse categorie in base alla loro scala temporale e ai processi fisici che le causano.

Su scale temporali geologiche (milioni di anni), il geode varia in risposta a processi tettonici come la subduzione, l'orogenesi, la convezione mantellica e la distribuzione delle placche continentali. Queste variazioni su lunga scala temporale sono tipicamente dell'ordine di decine di metri e riflettono cambiamenti fondamentali nella struttura interna della Terra.

Su scale temporali glaciali (migliaia di anni), il geode è fortemente influenzato dall'aggiustamento glacioisostatico (GIA - Glacial Isostatic Adjustment). Durante le glaciazioni, il peso delle enormi calotte di ghiaccio deprime la crosta sottostante, alterando la distribuzione delle masse e quindi il campo gravitazionale. Con la deglaciazione, la crosta si solleva lentamente (rebound post-glaciale) in un processo che continua ancora oggi nelle regioni precedentemente glaciali come la Scandinavia e il Canada. Questo sollevamento è accompagnato da variazioni dell'ondulazione geoidale dell'ordine di millimetri all'anno.

Coordinate Celesti, Precessione, Nutazione e Rotazione Terrestre

Sistemi di Coordinate Celesti: Fondamenti

La determinazione precisa delle coordinate terrestri e la definizione rigorosa dei datum geodetici richiedono necessariamente il riferimento a sistemi di coordinate celesti. Questa connessione fondamentale deriva dal fatto che l'orientamento della Terra nello spazio, e quindi l'orientamento dei sistemi di coordinate terrestri, può essere stabilito solo mediante osservazioni di oggetti celesti la cui posizione è conosciuta in un sistema di riferimento inerziale.

Un sistema di riferimento inerziale è, per definizione, un sistema di coordinate nel quale le leggi della meccanica newtoniana assumono la loro forma più semplice, senza termini di forza apparente. Nel contesto della geodesia e dell'astrometria, si utilizza un sistema di riferimento quasi-inerziale centrato nel baricentro del sistema solare, chiamato International Celestial Reference System (ICRS). La realizzazione pratica di questo sistema, l'International Celestial Reference Frame (ICRF), è definita mediante le posizioni estremamente accurate di alcune centinaia di quasar extragalattici osservati con interferometria radio a lunghissima base (VLBI).

Il sistema ICRS è definito con l'asse z orientato approssimativamente verso il polo celeste nord (direzione del momento angolare orbitale terrestre), l'asse x diretto approssimativamente verso l'equinozio di primavera (intersezione dell'equatore celeste con l'eclittica), e l'asse y completante un sistema destrorso. Tuttavia, la definizione rigorosa dell'ICRS non fa riferimento a equatore o eclittica, che sono piani dipendenti dalla dinamica terrestre e quindi soggetti a variazioni secolari, ma è puramente cinematica, basata sulle posizioni osservate dei quasar di riferimento.

Le coordinate in un sistema celeste sono tipicamente espresse mediante ascensione retta α e declinazione δ , analoghe rispettivamente alla longitudine e latitudine geografiche ma riferite alla sfera celeste. L'ascensione retta è misurata lungo l'equatore celeste a partire dall'origine delle coordinate (approssimativamente l'equinozio vernale) verso est, con valori da 0 a 24 ore (o da 0° a 360°). La declinazione è l'angolo misurato dall'equatore celeste verso nord (positivo) o sud (negativo), con valori da -90° a $+90^\circ$.

Relazione tra Sistemi Celesti e Terrestri

La trasformazione tra il sistema di riferimento celeste inerziale (ICRS) e un sistema di riferimento terrestre (come ITRS o WGS84) è complessa e dipende dal tempo in modo intricato. Questa trasformazione deve tenere conto di tutti i movimenti e orientamenti variabili della Terra rispetto al sistema inerziale.

La catena di trasformazioni può essere schematizzata concettualmente come segue:

ICRS $\rightarrow$ sistema celeste intermedio (epoca data) $\rightarrow$ sistema terrestre intermedio (tempo universale) $\rightarrow$ sistema terrestre reale (tempo UTC)

Ogni passaggio in questa catena corrispondente a una rotazione o serie di rotazioni che compensa un particolare effetto astronomico o geofisico. I principali fenomeni che devono essere considerati sono:

1. **Precessione lunisolare:** il movimento secolare dell'asse di rotazione terrestre e dell'equatore celeste causato dalle coppie gravitazionali esercitate dal Sole e dalla Luna sulla Terra non perfettamente sferica
2. **Nutazione:** le oscillazioni periodiche sovrapposte al movimento di precessione, anch'esse causate principalmente da effetti gravitazionali lunari e solari
3. **Moto polare:** le variazioni della direzione dell'asse istantaneo di rotazione terrestre rispetto alla crosta terrestre, causate da redistribuzioni di massa e momento angolare

all'interno del sistema Terra

4. **Rotazione terrestre:** la rotazione diurna della Terra attorno al suo asse, con velocità angolare variabile nel tempo
5. **Tempo:** la necessità di specificare accuratamente l'istante temporale per il quale la trasformazione è valida, considerando le diverse scale temporali utilizzate (UTC, UT1, TAI, TT)

Precessione: Movimento Secolare dell'Asse Terrestre

La precessione è il lento movimento conico dell'asse di rotazione terrestre attorno al polo dell'eclittica (direzione perpendicolare al piano orbitale terrestre). Questo movimento è causato principalmente dalla coppia gravitazionale che il Sole e la Luna esercitano sul rigonfiamento equatoriale della Terra. Poiché la Terra non è perfettamente sferica ma è schiacciata ai poli, con un momento di inerzia maggiore attorno all'asse equatoriale rispetto all'asse polare, la forza gravitazionale differenziale produce una coppia che tende a allineare l'asse di rotazione con la normale all'orbita.

Il periodo della precessione lunisolare è approssimativamente 25.772 anni, durante i quali l'asse di rotazione descrive un cerchio completo attorno al polo dell'eclittica. Questo implica che l'orientamento dell'equatore celeste rispetto alle stelle fisse cambia gradualmente, con una velocità angolare di circa 50,3 secondi d'arco per anno in longitudine.

Un effetto notevole della precessione è lo spostamento dell'equinozio vernale (intersezione tra equatore celeste ed eclittica) lungo l'eclittica, completando un circuito in circa 25.772 anni. Questo fenomeno è noto come precessione degli equinozi. A causa di questo movimento, la "stella polare" cambia nel corso dei millenni: attualmente è Polaris (α Ursae Minoris), ma nell'antico Egitto era Thuban (α Draconis), e tra circa 12.000 anni sarà Vega (α Lyrae).

La teoria matematica della precessione coinvolge rotazioni tridimensionali complesse. Secondo il modello IAU 2006, la precessione può essere decomposta in diverse componenti:

- Precessione in longitudine: $\psi_A = 5038,481507 t + f(t^2, t^3, \dots)$ secondi d'arco
- Obliquità media: $\epsilon_A = 84381,406 - 46,836769 t - f(t^2, t^3, \dots)$ secondi d'arco
- Precessione in ascensione retta: $\omega_A =$ espressione analoga

dove t è il tempo misurato in secoli giuliani di 36525 giorni a partire dall'epoca standard J2000.0 (1° gennaio 2000, ore 12 TT), e f rappresenta termini di ordine superiore che diventano significativi su scale temporali secolari.

La matrice di rotazione che implementa la precessione dal sistema celeste all'epoca J2000.0 al sistema celeste all'epoca t è il prodotto di tre rotazioni elementari:

$$P(t) = R_3(-z) R_2(+\theta) R_3(-\zeta)$$

dove ζ , θ , z sono angoli di precessione calcolati da formule polinomiali in t , e $R_i(\alpha)$ indica una rotazione di angolo α attorno all'asse i -esimo.

Nutazione: Oscillazioni Periodiche

Sovrapposta al movimento secolare di precessione, si osserva una serie di oscillazioni periodiche dell'asse di rotazione terrestre chiamate nutazione. Queste oscillazioni hanno periodi che vanno da pochi giorni a 18,6 anni e ampiezze che raggiungono alcuni secondi d'arco. La nutazione è causata principalmente dalle variazioni periodiche della forza gravitazionale lunare e solare dovute alle geometrie orbitali variabili.

Il termine dominante nella nutazione, con periodo di 18,6 anni e ampiezza di circa 9,2 secondi d'arco in longitudine e 6,9 secondi d'arco in obliquità, è associato al moto di regressione dei nodi dell'orbita lunare. Questo ciclo di 18,6 anni, noto fin dall'antichità, riflette la precessione del piano orbitale lunare causata dalle perturbazioni gravitazionali solari.

Altri termini significativi nella nutazione includono:

- Nutazione semestrale (periodo di 182,6 giorni, ampiezza $\sim 1,3$ arcsec), legata all'orbita terrestre
- Nutazione mensile (periodo di 27,6 giorni, ampiezza $\sim 0,5$ arcsec), legata all'orbita lunare
- Nutazione quattordicennale (periodo di 13,7 giorni, ampiezza $\sim 0,2$ arcsec), armonica dell'orbita lunare

Il modello di nutazione adottato dalla International Astronomical Union, chiamato IAU 2000A (o più comunemente IAU 2000/2006), include 1365 termini sinusoidali per descrivere accuratamente tutti i contributi significativi. La forma generale è:

$$\Delta\psi = \sum_i [(A_i + A'_i t) \sin \theta_i + A''_i \cos \theta_i] \quad \Delta\epsilon = \sum_i [(B_i + B'_i t) \cos \theta_i + B''_i \sin \theta_i]$$

dove $\Delta\psi$ è la nutazione in longitudine, $\Delta\epsilon$ è la nutazione in obliquità, θ_i sono combinazioni lineari degli argomenti di Delaunay (anomalie medie e longitudini lunari e solari), e A_i , B_i , A'_i , B'_i , A''_i , B''_i sono coefficienti numerici determinati da teoria gravitazionale e osservazioni.

La matrice di nutazione $N(t)$ è calcolata come il prodotto di tre rotazioni:

$$N(t) = R_1(-\epsilon_0 - \Delta\epsilon) R_3(-\Delta\psi) R_1(+\epsilon_0)$$

dove ϵ_0 è l'obliquità media dell'eclittica all'epoca J2000.0 ($23^\circ 26' 21,406''$).

Moto Polare: Variazioni dell'Asse Istantaneo di Rotazione

Il moto polare si riferisce alle variazioni della posizione dell'asse istantaneo di rotazione terrestre rispetto alla crosta terrestre. In altre parole, il "polo geografico" (intersezione dell'asse di rotazione con la superficie terrestre) non è fisso rispetto ai punti geografici ma descrive un percorso irregolare con ampiezze tipiche di 10-20 metri.

Il moto polare è causato da redistribuzioni di massa e momento angolare all'interno del sistema Terra. I principali contribuenti sono:

- Variazioni stagionali e interannuali nella distribuzione di masse atmosferiche, oceaniche e idrologiche
- Movimenti del nucleo esterno fluido e accoppiamenti nucleo-mantello
- Deformazioni crostali e aggiustamenti glacioisostatici
- Effetti di marea solida terrestre

Il moto polare osservato mostra diversi componenti periodiche sovrapposte a una deriva secolare:

- **Termine di Chandler:** oscillazione con periodo di circa 433 giorni e ampiezza di 100-200 miliardesimi di secondo, corrispondente a 3-6 metri sulla superficie terrestre. Questo termine rappresenta il modo fondamentale di oscillazione libera della Terra come corpo rigido deformabile.
- **Termine annuale:** oscillazione con periodo di un anno e ampiezza di 80-120 miliardesimi di secondo, causata principalmente da redistribuzioni stagionali di masse atmosferiche e idrologiche.
- **Deriva secolare:** movimento a lungo termine dell'asse medio di rotazione, con velocità di circa 3 miliardesimi di secondo per anno in direzione del 75° meridiano ovest, verso la Groenlandia e il Canada. Questo trend è attribuito principalmente all'aggiustamento glacioisostatico post-glaciale e a variazioni della distribuzione di masse glaciali.

Il moto polare è monitorato continuamente mediante osservazioni VLBI, GPS, SLR (Satellite Laser Ranging) e DORIS (Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite). L'International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS) pubblica regolarmente i parametri di orientamento terrestre (EOP - Earth Orientation Parameters), che includono le coordinate x_p , y_p del polo celeste istantaneo nel sistema terrestre.

La matrice di rotazione che trasforma dal sistema terrestre convenzionale (ITRS) al sistema terrestre istantaneo, correggendo per il moto polare, è:

$$W(t) = R_3(-s') R_2(x_p) R_1(y_p)$$

dove x_p e y_p sono le coordinate del polo alla data t , e s' è una piccola correzione (dell'ordine di miliardesimi di secondo) legata alla posizione del Conventional International Origin (CIO).

Rotazione Terrestre e Tempo Siderale

La rotazione diurna della Terra attorno al suo asse fornisce la base per la definizione del giorno e dei sistemi di tempo basati sulla rotazione terrestre. Tuttavia, la velocità di rotazione terrestre non è perfettamente costante ma presenta variazioni su diverse scale temporali.

La rotazione terrestre può essere quantificata mediante l'angolo di rotazione terrestre (ERA - Earth Rotation Angle), definito come l'angolo tra il meridiano di riferimento celeste (CIO - Celestial Intermediate Origin) e il meridiano di riferimento terrestre (TIO - Terrestrial

Intermediate Origin). L'ERA è una quantità che aumenta monotonicamente con il tempo e fornisce una misura diretta della fase rotazionale della Terra.

La relazione tra ERA e il tempo universale UT1 (scala temporale basata sulla rotazione terrestre) è convenzionalmente definita come:

$$\text{ERA} = 2\pi (0,7790572732640 + 1,00273781191135448 T_u)$$

dove T_u è il tempo espresso in giorni giuliani UT1 a partire dall'epoca J2000.0, e i coefficienti sono definiti per convenzione IAU in modo da assicurare continuità con definizioni precedenti di tempo siderale.

La differenza tra tempo universale coordinato UTC (scala temporale atomica con secondi intercalari aggiunti per mantenere la sincronizzazione approssimata con la rotazione terrestre) e tempo universale UT1 è chiamata UT1-UTC o DUT1. Questo parametro, pubblicato dall'IERS, varia irregolarmente ed è essenziale per convertire tra sistemi temporali differenti.

Le variazioni della velocità di rotazione terrestre si manifestano in variazioni della lunghezza del giorno (LOD - Length Of Day). Su scale temporali geologiche, la rotazione terrestre sta rallentando a causa della dissipazione di energia per attrito mareale, con un allungamento del giorno di circa 1,7 millisecondi per secolo. Su scale temporali stagionali e interannuali, variazioni di LOD dell'ordine di millisecondi sono causate da:

- Redistribuzioni atmosferiche stagionali (venti zonali, pressione atmosferica)
- Variazioni oceaniche (correnti, livello del mare)
- Accoppiamenti tra mantello e nucleo fluido
- Effetti climatici interannuali (El Niño/La Niña, oscillazioni decennali)

La matrice di rotazione terrestre che implementa la rotazione diurna è semplicemente:

$$R(t) = R_3(\text{ERA})$$

una rotazione attorno all'asse z di un angolo pari all'angolo di rotazione terrestre.

Trasformazione Completa: Da ICRS a ITRS

La trasformazione completa dal sistema di riferimento celeste inerziale ICRS al sistema di riferimento terrestre ITRS richiede l'applicazione sequenziale di tutte le rotazioni precedentemente discusse. Secondo le convenzioni IAU 2000/2006 e IERS 2010, la matrice di trasformazione totale è:

$$[\text{ITRS}] = W(t) R(t) Q(t) [\text{ICRS}]$$

dove:

- $Q(t)$ = [bias] [precessione-nutazione]
- $R(t)$ implementa la rotazione terrestre (ERA)
- $W(t)$ corregge per il moto polare

Esplicitamente, con tutti i dettagli:

$$[ITRS] = R_3(-s') R_2(x_p) R_1(y_p) R_3(ERA) R_3(-E_0) N(t) P(t) B [ICRS]$$

dove B è una piccola matrice di bias che corregge per la differenza tra il sistema celeste all'epoca J2000.0 e l'ICRS moderno, P(t) è la matrice di precessione, N(t) la matrice di nutazione, E_0 è l'equazione degli equinozi (una piccola correzione), e le matrici finali implementano la rotazione e il moto polare.

Nella pratica, i software di geodesia spaziale implementano queste trasformazioni utilizzando parametri EOP pubblicati dall'IERS, che forniscono:

- Coordinate del polo x_p , y_p (tipicamente con accuratezza sub-milliarcosecondo)
- UT1-UTC o UT1-TAI
- Correzioni alle componenti di nutazione dX, dY (differenze tra modello teorico e osservazioni)

L'accuratezza complessiva della trasformazione, limitata principalmente dall'incertezza nella determinazione osservativa dei parametri EOP, è dell'ordine di 0,1 milliarcosecondo in orientamento, corrispondente a circa 3 millimetri sulla superficie terrestre. Questa precisione è adeguata per praticamente tutte le applicazioni geodetiche moderne, inclusa la definizione dei datum geodetici e l'analisi di deformazioni crostali millimetriche.

Applicazioni Pratiche: GPS e Geodesia Satellitare

I sistemi di posizionamento satellitare globale (GPS, GLONASS, Galileo, BeiDou) operano intrinsecamente in sistemi di coordinate terrestri geocentrici. Le orbite dei satelliti sono determinate mediante osservazioni da stazioni di tracking distribuite globalmente, e le effemeridi (tabelle di posizioni satellitari in funzione del tempo) sono calcolate e diffuse in un sistema terrestre specifico.

Per il GPS, il sistema di riferimento è WGS84, come precedentemente discusso. Le effemeridi trasmesse dai satelliti GPS forniscono parametri orbitali che permettono agli utenti di calcolare le posizioni dei satelliti nel sistema WGS84 a qualsiasi istante. La trasformazione al sistema ITRS, quando necessaria per applicazioni geodetiche di altissima precisione, richiede l'applicazione di piccole correzioni basate sui parametri di trasformazione tra WGS84 e l'ITRF corrente.

Il processamento di osservazioni GPS per applicazioni geodetiche di precisione richiede la modellazione accurata di numerosi effetti:

- Ritardi troposferici: la propagazione del segnale attraverso la troposfera neutra introduce ritardi dell'ordine di 2-20 metri a seconda dell'angolo di elevazione
- Ritardi ionosferici: la dispersione nella ionosfera causa ritardi frequenza-dipendenti, eliminabili mediante combinazioni lineari di osservazioni a frequenze multiple
- Effetti relativistici: correzioni sia relativistiche speciali (dovute al moto dei satelliti) che generali (campo gravitazionale terrestre) sono dell'ordine di decine di metri
- Carichi oceaniche e atmosferiche: deformazioni crostali indotte da variazioni di carico superficiale, con ampiezze fino a centimetri

- Effetti di marea solida: deformazioni crostali dovute alle maree gravitazionali lunari e solari, con ampiezze fino a 30-40 centimetri in verticale

La combinazione di osservazioni da reti globali di stazioni permanenti GPS/GNSS, processate con modelli dinamici e parametri EOP accurati, permette di determinare coordinate terrestri con accuratezza orizzontale di 1-2 millimetri e accuratezza verticale di 3-5 millimetri, mantenendo coerenza con i sistemi di riferimento terrestri e celesti internazionali.

Prospettive Future e Sviluppi Tecnologici

La geodesia contemporanea sta vivendo una fase di rapido sviluppo tecnologico che promette ulteriori miglioramenti nella determinazione delle coordinate terrestri e nella definizione dei sistemi di riferimento. Le tendenze principali includono:

Densificazione delle reti GNSS permanenti: l'espansione delle reti di stazioni permanenti GPS/GNSS fornisce una copertura sempre più capillare del territorio, permettendo applicazioni di monitoraggio deformazioni crostali, subsidenza, movimenti franosi con risoluzione spaziale e temporale senza precedenti.

Integrazione multitecnica: la combinazione di diverse tecniche geodetiche spaziali (GNSS, VLBI, SLR, DORIS) mediante approcci di elaborazione unificati produce soluzioni più robuste e accurate per i parametri EOP e per la definizione dei sistemi di riferimento terrestri.

Orologi atomici nello spazio: le missioni satellitari con orologi atomici ottici di nuova generazione (accuratezza relativa 10^{-18}) apriranno nuove possibilità per geodesia relativistica, permettendo di misurare variazioni del potenziale gravitazionale terrestre con accuratezza di decimi di metro attraverso confronti di frequenze orologi.

Gravimetria satellitare di nuova generazione: future missioni gravitazionali con tecnologie avanzate (accelerometri quantistici, interferometri atomici, laser ranging satellite-a-satellite di nuova generazione) permetteranno di migliorare i modelli geoidali di un ordine di grandezza, raggiungendo accuratezze millimetriche su scale globali.

Modellazione geofisica avanzata: l'integrazione di modelli geodetici con modelli geofisici della dinamica terrestre (tettonica delle placche, reologia crostale, idrosfera, criosfera, atmosfera) permetterà interpretazioni più complete delle variazioni osservate e previsioni migliori delle evoluzioni future.

L'evoluzione continua della geodesia teorica e osservativa garantisce che i sistemi di coordinate terrestri diventeranno sempre più accurati, stabili e integrati con la comprensione fisica del nostro pianeta dinamico, fornendo la base essenziale per innumerevoli applicazioni scientifiche, tecnologiche e sociali nel ventunesimo secolo.

Conclusioni

Il trattamento rigoroso dei sistemi di coordinate terrestri dalla prospettiva della geometria differenziale rivela la profonda interconnessione tra concetti matematici astratti e applicazioni pratiche di vitale importanza. La sfera e l'ellissoide come varietà differenziabili, dotate di strutture metriche specifiche, forniscono il substrato geometrico sul quale si definiscono coordinate geografiche, proiezioni cartografiche e datum geodetici.

La comprensione delle singolarità coordinate, delle proprietà di curvatura, delle geodetiche e delle strutture differenziali associate permette di apprezzare tanto le potenzialità quanto i limiti dei diversi sistemi coordinati. La transizione dalla geometria sferica ideale alla realtà ellissoidale, e quindi alla complessità del geoide fisico, illustra il percorso storico della geodesia da disciplina puramente geometrica a scienza che integra gravitazione, meccanica celeste e geofisica.

I sistemi pratici come UTM, i datum come WGS84 e ITRS, e le trasformazioni tra sistemi diversi rappresentano cristallizzazioni di secoli di sviluppo teorico e osservativo, ora codificate in standard internazionali che permettono la determinazione di posizioni con accuratezze millimetriche ovunque sulla superficie terrestre. Il legame essenziale con i sistemi di coordinate celesti, mediato dai fenomeni di precessione, nutazione e rotazione terrestre, chiude il cerchio concettuale tra geodesia terrestre e astronomia.

La geodesia moderna, armata di tecnologie satellitari, strumentazione atomica e algoritmi computazionali sofisticati, continua a perfezionare i sistemi di coordinate terrestri, avvicinandosi asintoticamente all'obiettivo di un sistema globalmente coerente, temporalmente stabile e fisicamente significativo per la rappresentazione matematica del nostro pianeta.